TD$_8$ – Algèbre bilinéaire

Exercice 1 ★

Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 ★★

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions de E telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.

1. Montrer que, pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$
2. En déduire que, si f et g appartiennent à E_2 alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ converge
3. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
4. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ de $E_2\times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2

Exercice 3 Un analogue pour les suites ★★

Soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2$ converge.

1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ de $E_2\times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2

Exercice 4 ★★

Pour $P, Q\in\mathbb{R}_4[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.
2. On considère à présent l'ensemble $E = \{P\in\mathbb{R}_4[X] : P(0) = P(4) = 0\}$.
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Montrer que $E = \{X(X-4)Q,\ Q\in\mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base et la dimension de E.
3. On définit une famille (M_1, M_2, M_3) de $\mathbb{R}_4[X]$ par $P_1 = (X-2)(X-3)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$, $P_3 = (X-1)(X-2)$. On pose alors $M_i = X(X-4)P_i$.
   (a) Montrer que pour tout $i\in[\![1,3]\!]$, $M_i(i)\neq 0$. On pose alors $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)}M_i$.
   (b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée de E.
   (c) En déduire que pour $P\in E$, on a $P = P(1)N_1 + P(2)N_2 + P(3)N_3$.

Exercice 5 ★★★

Soit E un espace euclidien. Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de E.

Montrer que la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe

Exercice 6 ★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 7 ★

Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ la famille (a_1, a_2, a_3)

1. avec $a_1 = (0, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$;
2. avec $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, -1)$, $a_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 8 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ★★★

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$
2. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.
3. $E = \mathbb{R}^4, F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$, produit scalaire canonique.
4. $E = \mathbb{R}[X], F = \mathrm{Vect}(X^2 + 1, X^3 + 1), \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 9 ★

Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est orthogonale.
2. On pose $e_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right), e_2 = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right), e_3 = \left(0, 0, \frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right), e_4 = \left(0, 0, \frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Exercice 10 ★

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de $F^\perp$ dans les deux cas suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, -2), (0, 1, 3, 2))$
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ et } x - y - t = 0\}$

Exercice 11 ★★★

Soit E un espace euclidien et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 12 ★★

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace euclidien E. Montrer que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 13 Vecteur normal à un hyperplan ★★

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y - z + t = 0\}$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ tel que $x \in F \Leftrightarrow \langle x, u \rangle = 0$.

2. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur F ainsi que sa matrice dans la base canonique.

Exercice 14 ★★★

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$. Soit p l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $p(M) = \dfrac{M+M^\top}{2}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que p est un projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer son image et son noyau.
3. Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Calculer $\min\limits_{A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$. Même question si M est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 15 Calcul de projetés orthogonaux ★★

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $X^2 + X + 1$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $X^3 + X^2 + X + 1$ sur $F = \mathrm{Vect}(X^3 + X, X^2, 1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $X^2 - 1$ sur $F = \mathrm{Vect}(1 + X, X^2 - X)$.

Exercice 16 ★★★

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$
2. On se place désormais dans le cas $n = 2$.
   (a) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ,\ P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel. En donner une base.
   (b) Déterminer une base orthonormée de F
   (c) Déterminer la distance de X^2 à F.

Exercice 17 ★★★

Dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $2x + y + z = 0$. Déterminer une base orthonormée de P, la matrice de la projection orthogonale sur P dans la base canonique et le projeté orthogonal de $v = (1, -3, 2)$.

Exercice 18 ★

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $P : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{array} \right.$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P.

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★★

(Oral 2018)

On définit la suite de polynômes (H_n) par $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $H_n = 2XH_{n-1} - H_{n-2}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, le polynôme H_n est de degré n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $H_n(\cos(\theta))$.
3. Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (On pensera bien à justifier la convergence d'une telle intégrale impropre).
4. Montrer que (H_n) est une suite orthogonale pour ce produit scalaire

Exercice 20 ★★★

(Oral 2018)

Pour quelles valeurs de x et y réels l'intégrale $I(x, y) = \displaystyle\int_0^{\pi} (t^2 + x\cos(t) + y)^2\,\mathrm{d}t$ est elle minimale ?

Exercice 21 ★★★

(Oral 2016)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On définit le plan F par l'équation $x + 2y + 2z = 0$. On pose p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F.

1. Déterminer une base orthonormale de F. La compléter en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
2. Donner les matrices de p et s dans la base canonique.
3. Donner les matrices de p et s dans la base de la question 1.

Exercice 22 ★★★

(Oral 2006, 2018)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^\top N)$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Décomposer $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\varphi : M \mapsto M - 2\dfrac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A)}A$ est une symétrie orthogonale.

Exercice 23 ★★★

(Oral 2012, 2016)

Pour $(P, Q) \in E = \mathbb{R}_2[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est une base orthogonale de E puis en déduire une base orthonormée $\mathcal{C}$.
3. On définit $f : P \mapsto P(1 - X)$. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}. Que peut-on dire de f ?
4. f est-elle une symétrie orthogonale ?